

Lösungen Klausur (Wiederholung) Analysis III

1. Aufgabe: Erste Lösung (kompliziert)

Verwende Polarkoordinaten für x, y : $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
($r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$)

Für gegebenes $x = r \cos \varphi$ ist $z^2 \in 1 - x^2$,
also $z \in [-\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi}, \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi}]$.

$$\Rightarrow \text{Volumen} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi} \cdot r \, dr \, d\varphi$$

Das r -Integral (für festes φ) lässt sich mit der Substitution $s = r^2 \cos^2 \varphi$ berechnen:

$$r \in [0, 1] \Rightarrow s \in [0, \cos^2 \varphi]$$

und $ds = \cos^2 \varphi \cdot 2r \, dr$, man erhält

$$\int_0^{\cos^2 \varphi} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1-s} \, ds = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[-\frac{(1-s)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[1 - (1 - \cos^2 \varphi)^{3/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2 \varphi} (1 - |\sin \varphi|^3).$$

Auf $\varphi \in [0, \pi]$ (das ist eine Hälfte des Körpers)

ist $\sin \varphi \geq 0$, also

$$\text{Volumen} = 2 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \frac{1 - (\sin \varphi)^3}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi$$

Mit $\int \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \tan \varphi$

und (mit $u = \cos \varphi \Rightarrow du = -\sin \varphi d\varphi$ bzw. $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - u^2$)

$$\int \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = -\int \frac{1-u^2}{u^2} du$$

$$= \frac{1}{u} + u = \frac{1}{\cos \varphi} + \cos \varphi$$

folgt

$$\text{Volumen} = 2 \cdot \frac{2}{3} \left[\tan \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} + \cos \varphi \right]_0^{\pi}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} [0 + 1 + 1 - (0 - 1 - 1)] = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

Bemerkung: Es scheint, abgavore des Integrand

$$I = \frac{1 - \sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (wo $\cos \varphi = 0$) unsterh und damit das Integral ~~da~~ nicht definit und nicht wie angegeben ausrechenbar.

Das ist aber kein Problem, denn mit $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

ist $\sin \varphi = \cos \psi$, $\cos \varphi = -\sin \psi$, und

mit $\cos \psi = 1 - \psi^2/2 + \dots$, $\sin \psi = \psi - \psi^3/3! + \dots$ ist

$$I = \frac{1 - (1 - \psi^2/2 + \dots)^3}{(\psi - \psi^3/3! + \dots)^2} = \frac{1 - 1 + \psi^2 \cdot 3 - \dots}{\psi^2 \cdot (1 - \psi^2/6 + \dots)^2} = \frac{3/2 - \dots}{1 - \dots}$$

wobei ... höhere ψ -Potenzen bedenken, als I nahe $\psi = 0$, d.h. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, steht, sogar ∞ , fortsetzbar.

1. Aufgabe, zweite Lösung (einfach)

Der Körper ist $\{ (x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \}$

Also

$$V_{\text{Körper}} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \, dy \, dx$$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

$$= 4 \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{16}{3}$$

2.) a) φ injektiv: Falls $\varphi(u, v) = \varphi(u', v')$, so

folgt $u^2 = (u')^2, v^2 = (v')^2$, also $u = u', v = v'$
wegen $u, u', v, v' > 0$.

φ Immersion: $\partial_u \varphi = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_v \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$

diese sind offenbar für $u \neq 0, v \neq 0$ linear unabhängig.

b) Die Gram-Determinante ist

$$g_\varphi = \det \begin{pmatrix} \|\partial_u \varphi\|^2 & \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle \\ \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle & \|\partial_v \varphi\|^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 1 \\ 1 & 1+4v^2 \end{pmatrix} \\ = 4u^2 + 4v^2 + 16u^2v^2,$$

die Fläche ist also

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{g_\varphi(u,v)} \, du \, dv = 2 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u^2 + v^2 + 4u^2v^2} \, du \, dv$$

c) Der Tangentialraum wird von $\partial_u \varphi, \partial_v \varphi$ aufgespannt.

Also

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

3.) a) Nach dem Satz von Gauß ist

$$\int_{\partial K} \langle V, \nu \rangle dS = \int_K \operatorname{div} V, \text{ das ist } = 0$$

wegen $\operatorname{div} V \equiv 0$.

b) Wende a) auf die Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$
an. Es gilt $\nu(x) = \frac{x}{r}$ für alle $x \in \partial K$.

Behauptung: Es gibt ein $x \in \partial K$ mit

$$\langle V(x), \nu(x) \rangle = 0.$$

Für dieses x ist dann $V(x)$ senkrecht auf x .

Beweis: Die Funktion $x \mapsto \langle V(x), \nu(x) \rangle =: f(x)$
 $\partial K \mapsto \mathbb{R}$

ist stetig. Wäre sie überall positiv, so wäre
auch $\int_{\partial K} f(x) dS(x)$ positiv, im Widerspruch zu a),

analog für negativ.

Also gibt es $p, q \in \partial K$ mit $f(p) > 0, f(q) < 0$.

Wähle einen Weg γ von p nach q . Nach
dem Zwischenwertsatz muss $f(x) = 0$ für ein
 x auf diesem Weg sein.

(Genauer: Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \partial K$, $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.
stetig

Dann ist $g := f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$g(0) > 0, g(1) < 0$. Also $g(t) = 0$ für ein $t \in [0, 1]$,
siehe $x := \gamma(t)$. qed

4) a) Falsch z.B. $f_k(x) = \chi_{[k, k+1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 $f(x) = 0$.

Es gilt $\int f_k = 1 \not\rightarrow \int f = 0$, aber $f_k \rightarrow f$ punktweise.

(Damit es stimmt, muss man annehmen, dass es eine integrierbare Funktion g gibt mit $|f_k| \leq g$ für alle k .)

Also erstens: dasselbe g für alle k
und zweitens: konstant $\neq 0$ über \mathbb{R}^n nicht integrierbar!

b) Falsch, z.B. (als Skizze)



↑
sich selbst durchdringende Fläche.

c) Richtig.

Beweis: $y(1) - y(0) = \int_0^1 y'(t) dt$

$$\rightarrow \|y(1) - y(0)\| \leq \int_0^1 \|y'(t)\| dt \leq \int_0^1 1 dt = 1.$$